OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER. 1913. N° 6.

SUR LES CONNAISSANCES GÉOMÉTRIQUES DES GRECS AVANT LA RÉFORME PLATONICIENNE.

NOTE SUR L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES, IX.

(PRÉSENTÉE À LA SÉANCE DU 12 DÉCEMBRE 1913).

PAR

H. G. ZEUTHEN.

Afin de tirer des conclusions justes des renseignements qui nous ont été donnés sur la plus ancienne géométrie des Grecs, soit par les anciens auteurs tels que Platon, Aristote, Archimède, soit par des auteurs qui vivaient beaucoup de siècles après eux, tels que Pappus, Proclus, Simplicius, Eutocius etc. et qui n'avaient sur nous-mêmes que le seul avantage de posséder encore quelques écrits actuellement perdus, il faut distinguer soigneusement entre les renseignements fournis sur les contributions directes à la formation du système géométrique que nous trouvons dans les Éléments d'Euclide, et ceux qui contiennent des renseignements sur telle ou telle connaissance à une certaine époque. Cette distinction devient plus difficile par le fait que les auteurs dont nous venons de parler regardent le système en formation au temps de Platon, et achevé par Euclide, comme identique à la géométrie elle-même ou comme la seule mathématique qui mérite le nom de géométrie.

A cet égard il suffit de rappeler qu' Archimède, dans l'introduction à son „Ephodicon“, nous apprend que Démocrite connaissait le rapport $\frac{1}{3}$ d'une pyramide ou d'un cône au prisme ou au cylindre élevé sur la même base et avec la même hauteur; mais dans l'introduction au premier livre sur la sphère et le cylindre, il nous dit qu'avant Eudoxe personne n'avait eu cette connaissance. En effet, Archimède distingue entre un savoir mal fondé selon lui et un savoir géométrique bien fondé; mais avant la découverte de l'Ephodicon on devait croire, sur la foi d'Archimède, que la vérité en question n'avait été énoncée que par Eudoxe.

De même, les propos de Platon dans son dialogue intitulé Théétète ont fait croire qu'avant Théodore on ne savait rien sur l'irrationnalité de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ . . . $\sqrt{17}$, et avant Théétète rien sur celle d'autres racines carrées et de racines cubiques, tandis que seule l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ aurait été connue par les Pythagoriciens. Or comme je l'ai montré dans un mémoire précédent[1], les déclarations de Platon trouvent une explication simple, si l'on considère le soin avec lequel Euclide démontre l'irrationnalité de toutes les racines irrationnelles. En effet, la véritable démonstration ne se trouve pas dans le X^e livre, où on l'a cherchée trop souvent, mais dans les trois livres arithmétiques qui le précèdent. Euclide a trouvé nécessaire d'y démontrer une vérité que sans doute les Pythagoriciens avaient regardée comme immédiatement évidente, à savoir qu'un nombre composé par multiplication de nombres premiers n'est pas divisible par un autre nombre premier. La découverte de cette nécessité est une observation beaucoup trop fine pour être attribuée à ceux qui ont les premiers observé l'irrationnalité des quantités en question. En attribuant à Théodore et à Théétète cette découverte et les démonstrations destinées à remédier aux difficultés qu'elle soulève, on aura une explication simple des assertions de Platon, lequel veut sans doute parler d'une démonstration regardée à son époque comme exacte, et on n'a plus besoin de recourir à cette hypothèse étrange que les Pythagoriciens eussent connu l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ sans se douter de celle de $\sqrt{3}$.

Tout en nous communiquant plusieurs traits importants

[1] Voir le présent Bulletin, 1910, p. 395.

sur les connaissances géométriques antérieures à la réforme Platonicienne, la meilleur source à laquelle puisaient les auteurs plus modernes dont j'ai parlé, je veux dire EUDÈME, le premier historien des Mathématiques, a d'une autre manière entremêlé à ses communications sa propre connaissance du système géométrique qui s'approchait à son époque de la forme définitive qu'il allait prendre dans les Éléments d'EUCLIDE. A cet égard nous rappellerons ses communications sur la géométrie de THALÈS dont PAUL TANNERY a donné la seule explication possible[1]: les théorèmes dont EUDÈME attribue la connaissance à THALÈS sont ceux qu'il faut connaître pour exécuter quelques constructions pratiques qu'à son époque on attribuait à THALÈS. Bien entendu, pour l'exécution de ces déterminations indirectes de distances qu'on était empêché de mesurer directement, THALÈS et les Égyptiens, qui connaissaient avant lui les mêmes constructions, devaient avoir une connaissance pratique des vérités qu'expriment les théorèmes, mais certainement à cette époque on n'a pas pensé à en faire des théorèmes formels. Que par exemple un diamêtre décompose un cercle en deux parties égales, voilà une vérité assez évidente pour qu'on en fît usage sans se donner la peine de l'énoncer formellement et de la démontrer.

Il ne faut pas voir dans les théorèmes attribués à THALÈS le commencement de la formation d'un système géométrique. Le plus intéressant de ce que nous en apprenons, c'est que THALÈS savait faire usage du fait qu'un angle inscrit à un demi-cercle est droit, fait identique du reste à cet autre qu'un rectangle est inscriptible à un cercle, et dont la connaissance n'implique pas même celle de la notion générale de l'angle[2].

[1] La Géométrie grecque, p. 89 et s.

[2] Voir un article „On the Geometry of Thales“ présenté par M. P. G. HARDING au Congrès international des Mathématiciens à Cambridge 1912.

Pour les auteurs de la décadence de la géométrie grecque la géométrie élémentaire était identique à celle d'Euclide. Il leur était donc impossible de faire, dans leurs recherches historiques, la distinction que nous demandons ici entre les contributions de nature à augmenter en général les connaissances géométriques et les contributions à la formation du système euclidien. Même les historiens modernes dépendent trop de la tradition qui remonte à Euclide pour avoir toujours pris garde à une distinction de ce genre, souvent assez difficile à observer. Cependant elle est nécessaire — nous avons commencé par le dire — pour tirer des conclusions justes des renseignements qui nous sont conservés sur la plus ancienne géométrie grecque. Cela ressort des exemples que nous venons de rappeler, et on parviendra au même résultat en réfléchissant bien sur la nature du système euclidien.

Ce système réalise, en effet, l'idée suivante, qui remonte à l'idéalisme de Platon et dont les applications à la géométrie doivent être l'œuvre d'amis plus versés dans les mathématiques que le maître. Le vif intérêt avec lequel il considérait leurs efforts et leurs tendances ressort du reste soit de la mention qu'il fait de l'œuvre de Théétète soit d'autres propos, même de ceux où il énonce des critiques sur leurs progrès à cet égard.

Dans la théorie platonicienne les notions géométriques primitives sont nos propres créations: nous leur donnons une existence soit par nos définitions, soit par les postulats, qui achèvent l'énumération des propriétés que nous voulons leur attribuer sans les démontrer. Leurs autres propriétés, ainsi que l'existence et les propriétés des figures qu'on construit en faisant usage des postulats, demandent des démonstrations reposant sur les postulats et certaines notions générales énoncées, de même que les postulats, au commencement.

Il est vrai que cette idée n'est exprimée formellement ni par Platon, ni par ses élèves, ni par Euclide, et que la réalisation qu'elle aurait dû trouver dans les Éléments d'EUCLIDE n'est pas complète. Seulement de nos jours PASCH l'a énoncée en des termes qui diffèrent un peu de ceux dont je viens de faire usage, et en même temps il a montré que pour réaliser le but proposé, il serait besoin de compléter les postulats d'EUCLIDE par d'autres, en particulier par des postulats sur l'ordre des points d'une droite et par quelques postulats semblables, dont EUCLIDE fait usage sans les énoncer formellement. Néanmoins on ne comprend guère le plan d'EUCLIDE, sans lui attribuer la tendance à laquelle nous venons de donner une expression. C'est donc aussi à EUCLIDE que PASCH et ses successeurs dans la même voie doivent la suggestion qui les y a fait entrer. On pourrait reprocher à EUCLIDE de n'avoir pas suivi avec plus de conséquence la même voie, mais c'est beaucoup plus la faute des successeurs d'EUCLIDE, pendant plus de deux milliers d'années, de n'avoir pas continué à marcher dans le sens indiqué par les élèves de PLATON jusqu'à EUCLIDE. Que du reste la tendance d'EUCLIDE ait été retenue par des successeurs dans l'antiquité, c'est ce qui ressort des essais plus ou moins heureux qui ont été faits pour compléter ses postulats et axiomes en y ajoutant d'autres auxquels il se réfère dans le texte sans leur avoir donné une place parmi ses postulats initiaux.

Dans un système géométrique de cette nature il s'agit de réduire les hypothèses énoncées sous forme de postulats ou d'axiomes aux vérités les plus simples sur les figures les plus simples. On s'élève de là aux vérités de plus en plus complexes sur des figures de plus en plus compliquées.

C'est la voie contraire ou du moins une voie toute différente qu'a suivie la première invention des vérités géométriques. La connaissance de ces vérités a commencé par s'attacher à des figures concrètes dont on a découvert successivement les propriétés géométriques, qui devaient de même commencer par se présenter sous une forme assez complexe. C'est seulement par une décomposition de ces vérîtés que peu à peu on est parvenu aux vérités simples qui font la base du système, et d'où l'on s'élève ensuite à une possession entièrement géométrique des vérités composées dont on connaissait en réalité une grande partie avant la formation du système.

La démonstration géométrique a existé aussi avant la formation d'un système géométrique. La démonstration géométrique sert à persuader ceux qui concèdent les prémisses de la vérité qu'on en conclut. Dans un système ces prémisses doivent être des vérités plus simples qu'on a soit postulées, soit déjà déduites des vérités postulées; mais supposé qu'elles soient concédées par le lecteur, des vérités composées peuvent aussi bien servir de prémisses.

Dès le moment où l'on a commencé de dessiner des figures, on a eu par exemple une idée de la similitude générale des figures, tandis que dans le système actuel la généralité d'une telle notion géométrique, préparée par l'étude de la similitude de figures très simples, ne fait que la sommité de la géométrie élémentaire. La proportionnalité des distances et l'égalité des angles, qui servent à présent de base à l'étude des figures semblables, se présentaient pour commencer comme des propriétés évidentes des mêmes figures, sans qu'on pensât à démontrer l'existence de telles figures. Il faut même y chercher l'origine des notions de la proportionnalité géométrique et de l'angle[1]. L'idée générale de la similitude devait fournir des prémisses assez reconnues pour servir de base

[1] Il est permis d'en voir un indice dans la désignation archaïque d'angles égaux: on les appelait *γωνίαι ἱώμοῖαι*, angles semblables (voir Proclus, éd. Friedlein p. 251[1]. On retrouve encore la même désignation dans les écrits d'Aristote). Elle doit dériver d'une époque où l'on ne regardait pas encore un angle comme une grandeur qu'on peut soumettre à des additions etc. Alors, au lieu de mesurer les angles on mesurait leurs cotangentes (le „seqt" des Égyptiens d'après les plus récentes recherches des égyptologues). On déterminait par exemple la hauteur du soleil par la longueur de l'ombre d'une perche verticale (gnomon).

à quelque démonstration du théorème sur la somme des angles d'un triangle. C'est même encore à cette idée générale que Legendre a recours en remplaçant le 5e postulat d'Euclide par la considération suivante: Un triangle est déterminé au moyen d'un côté et des deux angles adjacents. Or, la grandeur d'un côté ne peut déterminer que l'échelle de la figure tracée, et ne peut par conséquent avoir aucune influence sur les angles. Donc les deux angles du triangle déterminent le troisième.

Cependant la première découverte du dit théorème se rattachait probablement, de même que la démonstration d'Euclide, de plus près à l'idée des parallèles; mais Euclide montre qu'on en peut faire une théorie bien fondée en remplaçant ces idées d'abord trop générales et pour cette raison vagues par un postulat simple et indépendant de ces idées préalables. Qu'un tel postulat est indispensable, voilà une découverte de la plus haute importance pour la géométrie théorique: logiquement elle comprend la possibilité d'une géométrie non-euclidienne. Quelques déclarations d'Aristote[1] montrent qu'à son époque on avait remarqué la lacune que la théorie des parallèles présentait jusqu'alors. Il s'exprime ainsi: „Voilà ce que font ceux qui croient construire des parallèles; car sans s'en apercevoir ils supposent des choses telles qu'il n'est pas possible de les démontrer tant que les parallèles ne sont pas là". Cela veut dire que du moins „ceux" à qui il fait allusion négligent de démontrer que la construction en question assure bien l'existence des parallèles. Or d'autres citations d'Aristote[2] prouvent que le critère du parallélisme dont on faisait usage dès lors c'était l'égalité d'un angle externe et de l'angle interne correspondant provenant de l'intersection avec une troisième droite.

[1] 65a 4; voir J. L. Heiberg: Mathematisches zu Aristoteles (Abh. zur Geschichte der math. Wissensch. XVIII) p. 19.

[2] l. c. p. 18 (74a 13 et 66a 11).

Aristote reconnaissait donc la nécessité de démontrer la *suffisance* de ce critère (ce que fait Euclide en I 16), soit qu'on vînt de trouver une telle démonstration, soit qu'on en cherchât encore une; mais il ne semble pas encore être question de la *nécessité* du même critère. C'est pour établir cette nécessité qu'on a besoin du 5e postulat d'Euclide. On voit qu'en attribuant, ce qu'on fait ordinairement, le contenu essentiel des quatre premiers livres d'Euclide et en particulier celui des deux premiers aux Pythagoriciens, il faut en excepter ce qui concerne la forme qu'y prend la théorie des parallèles.

L'exigence formelle qu'on se serve exclusivement de la droite et du cercle pour exécuter les constructions pour lesquelles ces courbes suffisent, appartient aussi à la formation d'un système où l'on devait commencer par définir et caractériser les lignes les plus simples. Toutefois elle a été préparée par cette circonstance que la règle et le compas — et avant eux le cordon qui les a remplacés dans les mains des arpenteurs et des architectes — sont les instruments géométriques les plus simples et les plus faciles à manier.

Malgré leur mélange de renseignements sur la naissance ou sur l'existence d'un certain savoir géométrique et sur les contributions successives à la formation d'un système, on a puisé aux sources existantes des renseignements passablement clairs sur la préparation du système Euclidien par la découverte des irrationnelles due à Pythagore ou à ses premiers disciples, ensuite par les critiques de Zénon, et sur la constitution du système par les travaux des contemporains de Platon, en particulier par ceux d'Eudoxe et de Théétète. Ce qui a rendu possible cet historique, c'est avant tout notre connaissance du résultat final, à savoir des Éléments d'Euclide. On y retrouve tous les traits auxquels se rapportent les différentes étapes du développement, et la contre-épreuve de la juste interprétation des sources historiques, c'est la manière dont elles ont contribué à faire mieux comprendre soit beaucoup de détail soit le plan entier de l'œuvre d'EUCLIDE. Sans elles on n'y a trop souvent vu de nos jours qu'un exposé artificiel de ce que nous savons exposer à présent d'une manière plus simple et non moins exacte.

Cependant, comme j'ai étudié ailleurs la naissance du système Euclidien[1], je n'y reviendrai pas ici. Je me propose au contraire de tirer des mêmes sources historiques des renseignements sur les connaissances géométriques que les Grecs ont possédées ou acquises indépendemment de la découverte des irrationnelles, de l'invention de formes géométriques permettant de traiter des dites quantités avec la même précision que de celles qu'on savait calculer exactement, et de la constitution d'un système géométrique. Comme la découverte des irrationnelles témoigne d'une maturité géométrique déjà acquise, de telles connaissances ont déjà existé au temps de PYTHAGORE, et vu l'isolement des Pythagoriciens, elles ont fait probablement hors du midi de l'Italie d'autres progrès que ceux qu'a demandés la considération des dites quantités.

C'est ainsi que s'expliquent quelques indications tirées des Lois de PLATON[2]. Le grand philosophe y exprime son regret de ce que l'existence des quantités irrationnelles ne soit parvenue à sa connaissance qu'„assez tard", et à celle des Hellènes, dont il faut excepter sans doute ici l'École Pythagoricienne, qu'à une époque qu'il faut renvoyer probablement au commencement du IVe siècle. Les dires de PLATON doivent se rapporter particulièrement à Athènes; mais là, avant l'époque indiquée, HIPPOCRATE de Chios et probablement aussi

[1] Beretning om den anden skandinaviske Mathematikerkongres 1911 (udgiven af N. NIELSEN 1912) p. 3—13, et mon article publié dans le volume mathématique de „Die Kultur der Gegenwart" (1912).

[2] Dans son article sur „Die Entdeckungsweise des Irrationalen" Bibl. math. 10_3, M. H. VOGT a (p. 136) réuni ces citations (819 D, 820 A, 820 B). Dans mes articles déjà cités j'ai expliqué pourquoi je n'adopte nullement les conclusions qu'il en tire sur l'époque de la découverte des irrationnelles.

Antiphon avaient donné des leçons de géométrie, et de même l'époque d'Hippias d'Elis remonte aussi loin[1].

Il est du reste à remarquer que de ces savants Antiphon et Hippias sont désignés comme des sophistes, ce qui pourrait faire croire que leurs arguments géométriques étaient des „sophismes“ ou des artifices dialectiques. Il n'en est rien. La dénomination indiquée leur appartient en leur qualité de professeurs, et leurs élèves demandaient sans doute plutôt des applications de la géométrie que des abstractions scientifiques. Le plus célèbre sophiste, Protagoras, s'oppose même à ces abstractions en se moquant, par exemple, de l'explication géométrique d'après laquelle le contact d'une droite avec un cercle se borne à un seul point[2]. Cette opposition montre du reste que même à Athènes ces abstractions avaient commencé avant Platon.

Dans ces circonstances, on comprend que les doctrines géométriques des sophistes devaient fournir plus tard aux novateurs de l'école de Platon d'excellents exemples des erreurs auxquelles on s'expose en n'acceptant pas leurs points de vue plus exacts; mais alors il ne faut pas oublier qu'en nous rapportant ces doctrines on a eu pour seul but de faire sauter aux yeux les faiblesses logiques des conclusions. C'est donc à nous de tirer de là les véritables connaissances antérieures que les conclusions contestées devaient assurer, et même de nous demander si des hypothèses différentes de celles qu'on n'introduisit que plus tard n'ont pas justifié jusqu'à un certain degré l'usage de ces conclusions.

En nous occupant ici de connaissances et de progrès qui n'ont

[1] Les trois savants cités ici étaient au plus tard des contemporains de Socrate, et comme le remarque P. Tannery sur Hippocrate (La géométrie grecque, p. 109), rien ne prouve qu'ils aient eu des Pythagoriciens pour maîtres, supposition que j'avoue avoir partagée autrefois avec d'autres auteurs.

[2] Voir H. Diels: Die Fragmente der Vorsokratiker (dritte Auflage) II, p. 230^{20}—231^{2}.

pas pour but de donner à la géométrie une forme plus précise, nous rencontrerons sans doute beaucoup de vérités identiques à celles qui ont été élaborées avec un but théorique, et dont la connaissance peut être due à une influence pythagoricienne; mais alors nous chercherons avant tout les formes qu'elles prennent entre les mains d'auteurs qui ont plutôt en vue d'en faire des applications plus pratiques.

Nous avons déjà parlé des communications d'Eudème sur les connaissances géométriques de Thalès; elles ne nous apprennent absolument rien sur la forme que Thalès lui-même avait donnée à ces connaissances. Sans doute il ne faut attribuer qu'une importance également restreinte aux communications relatives à Œnopide de Chios. Selon Proclus[1], qui répète ici Eudème, „ce problème qui consiste à abaisser d'un point donné une perpendiculaire sur une droite donnée, fut, pour la première fois, cherché par Œnopide, qui le considéra comme utile pour l'astrologie", et Proclus dit d'un autre problème: construire un angle égal à un angle donné, le sommet et un côté de l'angle à construire étant donnés, qu'il „est aussi plutôt une découverte d'Œnopide, comme le dit Eudème" [2].

Ainsi que le fait observer P. Tannery[3], les citations montrent que la solution du premier problème est tirée d'un traité astronomique d'Œnopide. Chargé par Aristote de donner un aperçu historique des progrès de la géométrie, Eudème a donc été amené à consulter les différentes constructions et recherches géométriques qui se trouvaient dans les traités connus à son époque et qui n'étaient pas toujours des traités de géométrie. Trouvant alors les deux constructions dans les œuvres d'Œnopide, il n'a nullement pu garantir que les mêmes constructions n'aient pas été exécutées de la même manière avant Œnopide. Cependant le texte rend probable que ce savant s'est donné

[1] Éd. de Friedlein, p. 283^7.
[2] Ib. p. 333^5
[3] Géométrie grecque, p. 89.

la peine d'en expliquer l'exécution. Son motif peut avoir été qu'à son époque on commençait à se borner le plus possible à l'usage des instruments les plus simples et qu'il tenait à faire observer que l'exécution se fait dans ces cas par la règle et le compas. Mais cela n'empêche pas de croire que depuis longtemps on exécutait les mêmes constructions de la même manière, exécutions qui pour être connues n'avaient pas besoin d'être expliqués dans un traité écrit[1]. Nous ne sommes donc pas astreints à rapporter l'usage de constructions aussi simples à une époque aussi récente.

Toutefois la mention expresse d'EUDÈME signale un intérêt spécial attaché par ŒNOPIDE aux constructions géomètriques. Le même intérêt se communiqua à son compatriote et probablement son élève[2] HIPPOCRATE de Chios. Voilà ce que nous apprend la plus étendue et la plus importante des communications d'EUDÈME, celle que nous a conservée SIMPLICIUS et qui nous rapporte la quadrature des lunules („ménisques") par HIPPOCRATE.

Quant à l'étendue des connaissances géométriques dont témoignent les opérations d'HIPPOCRATE, il suffit de rappeler des faits connus: qu'il a à sa disposition le théorème sur la proportionnalité des aires de deux cercles aux carrés de leurs diamètres, d'où il parvient à la même proportionnalité de segments semblables; qu'il fait de nombreuses applications du théorème de PYTHAGORE sur le triangle rectangle, et des iné-

[1] S'il avait existé alors un traité spécial de géométrie, il aurait sans doute dû contenir ces constructions. Pour cette raison PAUL TANNERY croit postérieure à ŒNOPIDE l'œuvre hypothétique qu'il appelle la „Tradition touchant PYTHAGORE". Pas plus que la plupart des autres historiens nous n'adoptons son hypothèse sur l'existence d'une telle œuvre; nous croyons au contraire que les doctrines géométriques des Pythagoriciens ne se sont répandues qu'assez fortuitement avant qu'elles aient été continuées par l'École de PLATON. Les premiers Éléments de Géométrie ont dû être ceux d'HIPPOCRATE de Chios dont nous parlerons plus tard.

[2] En effet, ŒNOPIDE avait formé une école scientifique (Voir PAUL TANNERY, La Géométrie grecque, p. 89, note, et H. DIELS, Vorsokratiker I p. 297[2]).

galités qui le remplacent si l'on substitue un angle aigu ou obtus à l'angle droit ; que le théorème sur l'égalité des angles inscrits à un segment de cercle lui est entièrement familier ; qu'il sait déterminer le côté d'un triangle inscrit à un cercle de rayon donné et qu'il sait de même construire une longueur exprimée par $a\sqrt{\frac{3}{2}}$; qu'il regarde comme connue la construction d'un trapèze dont on connaît les côtés, et celle d'une droite passant par un point donné d'une circonférence et sur laquelle le segment intercepté entre l'autre point d'intersection avec le cercle et une corde perpendiculaire au diamètre passant par le point donné a une longueur donnée (νεῦσις), et enfin qu'il suppose connue la quadrature d'une figure rectiligne donnée. Or ces connaissances, qui appartiennent à différentes parties de la géométrie élémentaire, ne peuvent avoir été isolées.

Hippocrate sait faire usage de ces connaissances pour traiter la question qu'il s'est posée d'une manière dont l'ingéniosité n'est nullement amoindrie pas le résultat négatif auquel devaient conduire ses recherches. Je n'hésite pas à regarder comme leur but direct la quadrature exacte du cercle, ou bien la construction géométrique d'une figure rectiligne égale à un cercle donné. Il a démontré, en effet, dans la dernière partie de l'étude communiquée par Eudème, qu'un cercle est égal à la différence de deux lunules déterminées. Il sera donc carré si l'on sait carrer celles-ci. Afin d'en éprouver la possibilité il cherche les lunules carrables, ce qui lui permettra de décider si les deux lunules qui sont utiles pour la quadrature du cercle se trouvent parmi elles[1].

Cela n'a pas lieu, et il en faut conclure que l'égalité d'un cercle avec la différence de deux lunules, qu' Hippocrate avait

[1] P. Tannery regarde même (La géométrie grecque, p. 120) la tentative faite pour arriver à la quadrature du cercle par celle des lunules comme étant au-dessous de ce qu'on peut attribuer à Hippocrate, vu que la quadrature générale des lunules dépend de celle du cercle; mais pour réaliser celle-ci on n'aurait eu besoin que de la quadrature de lunules déterminées. Je ne partage donc pas à cet égard l'opinion de P. Tannery.

trouvée, ne conduit pas à la quadrature du cercle; mais pour arriver à une telle conclusion il faudrait s'être assuré d'avoir épuisé les moyens de construire des lunules carrables[1]. Hippocrate n'en possédait pas les moyens. Il a pu même conserver l'espoir de trouver encore la quadrature de lunules utiles.

On lui a même attribué la croyancc d'avoir carré toutes les lunules et d'être parvenu ainsi au but qu'il s'était posé. On a pu alléguer à cet égard le soin avec lequel il démontre que l'arc extérieur de la première lunule carrée est égal à une demi-circonférence, celui de la deuxième plus grand et celui de la troisième plus petit qu'une demi-circonférence. „Donc" — ainsi faudrait-il continuer pour parvenir au paralogisme attribué à Hippocrate — „tous les cas sont épuisés et toutes les lunules carrables!" Il est impossible qu'Hippocrate ait tiré cette conclusion, et le paralogisme a été plutôt imaginé par ceux qui ont voulu mettre en relief l'échec de sa tentative pour carrer les cercles, ce qui semble avoir intéressé par exemple Aristote plus que la beauté des propositions réellement trouvées par Hippocrate.

L'étendue des connaissances géométriques d'Hippocrate et sa finesse inventive dont nous venons de parler sont bien connues; mais leur valeur pour la recherche qui nous occupe dépend de la question suivante: Rencontrons-nous simplement ici une étape du développement théorique qui s'est continué depuis la découverte des imaginaires jusqu'aux Éléments d'Euclide? Ou n'est-ce pas plutôt un stade acquis assez indépendamment de ce développement, du moins un stade où l'on ne savait pas encore démontrer les vérités déjà connues de la manière que l'on exigea plus tard pour les reconnaître?

A ce sujet nous remarquons d'abord que les connaissances que nous avons rencontrées dans le travail d'Hippocrate se rapportent pour la plupart à des faits indépendants de la forme

[1] Voir Paul Tannery: Mémoires scientifiques I p. 367 (ou Mémoires de la Société de Bordeaux, 2e série, 1883 t. V).

sous laquelle les Pythagoriciens ont préparé le système d'EUCLIDE. Seulement la désignation des quantités $a\sqrt{3}$ et $a\sqrt{\frac{3}{2}}$ comme des droites qui sont „en puissance" 3 ou $\frac{3}{2}$ fois a est conforme à la manière dont les Grecs représentaient, depuis les Pythagoriciens, les racines carrées irrationnelles. La „νεῦσις" que nous avons rappelée appartient aussi aux constructions qu'on peut exécuter avec la règle et le compas au moyen des applications d'aires (résolutions géométriques d'équations quadratiques) qu'on attribue aux Pythagoriciens; mais il est plus probable qu'HIPPOCRATE a exécuté cette construction directement par une opération mécanique, qui est restée en usage longtemps après[1]. Plusieurs des connaissances, surtout celles qui concernent les aires des cercles et des segments, ne pouvaient avant EUDOXE être acquises de la même manière que dans les Éléments d'EUCLIDE.

Il faut donc chercher dans le fragment conservé les formes que prennent ces différentes vérités et, s'il est possible, des renseignements sur la manière dont on les a acquises.

Il s'élève ici cette difficulté que nous ne possédons pas le document original mais la reproduction due à SIMPLICIUS du rapport d'EUDÈME sur le travail d'HIPPOCRATE. SIMPLICIUS de son côté dit expressement qu'il rend verbalement le rapport d'EUDÈME en y ajoutant, pour plus de clarté, quelques renvois aux Éléments d'EUCLIDE, parce qu'EUDÈME, à la manière des anciens, ne nous rapporte qu'assez brièvement les développements. Il s'ensuit que les renvois à EUCLIDE et les commentaires appartiennent à SIMPLICIUS, ce qui a permis à plusieurs auteurs de présenter du texte d'EUDÈME des restitutions qui malgré quelques divergences dans le détail contribuent à le faire connaître dans ses traits essentiels[2].

[1] Voir mon „Keglesnitslæren i Oldtiden" chap. XII, Vidensk. Selsk. Skr. 6. R. n—m. Afd. III, 1885, p. 176. -- Traduction allemande, 1886, p. 270.

[2] C'est pourquoi nous pouvons renvoyer nos lecteurs à l'une ou l'autre de ces différentes restitutions: à celle de H. DIELS (Simplicii in Aristotelis physicorum libros quatuor priores Commentaria, Berolini 1882, p. 54—69,

Le rapport qui nous reste semble rendre assez fidèlement et sans aucun commentaire toute la marche du mémoire d'HIPPOCRATE, sans doute à quelques abréviations près, qui ont pu nécessiter la substitution de quelque petite remarque explicative à ce qu'EUDÈME aurait omis du texte d'HIPPOCRATE

C'est en suivant la voie indiquée par ces considérations qu'on est parvenu à connaître parfaitement les procédés d'HIPPOCRATE, mais pour retrouver aussi bien les considérations et les arguments qu'il a attachés à leur emploi, il faudra se placer à un point de vue que, selon moi, on a trop négligé. On n'a voulu restituer à EUDÈME et indirectement à HIPPOCRATE que les raisonnements qu'on a trouvés les plus clairs, les plus simples et les plus exacts, ce qui revient à dire: ceux qui sont le plus conformes à la géométrie grecque telle que nous la connaissons d'après les Éléments d'EUCLIDE, en attribuant à SIMPLICIUS ou même, pour sauver aussi l'honneur géométrique de ce commentateur, à des éditeurs plus modernes[1], tout ce qui est moins clair, moins exact, et en même temps moins conforme à la géométrie euclidienne.

Or, SIMPLICIUS tend précisément à rendre le rapport d'EUDÈME intelligible à ceux qui connaissent cette géométrie alors officielle depuis longtemps, et il semble lui-même la posséder assez bien pour s'y conformer. EUDÈME vivait à une époque où la constitution du système d'EUCLIDE approchait de son achèvement. Dès lors, les divergences entre les considérations du texte conservé et celles que nous retrouvons dans

qui forment le IX[e] vol. des Commentaria in Aristotelem graeca de l'Académie de Berlin), à celle de PAUL TANNERY (Mémoires scientifiques I, p. 347—354; Mémoires de Bordeaux, 2[e] série, 1883, t. V) et à l'édition de F. RUDIO, (qui a paru en 1907 dans la collection Teubner: Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Altertum), et nous borner à ne reproduire ici (après l'édition de DIELS) que les passages du texte sur lesquels nous aurons des observations particulières à faire, en en laissant seulement quelques parties que, d'accord avec tous les auteurs cités et avec J. L. HEIBERG (Philologus, 1884 pp. 336—344), nous attribuons à SIMPLICIUS.

[1] Cf. l'ouvrage cité de F. Rudio, p. 67, note 2.

Euclide, ne doivent-elles pas appartenir à Hippocrate, qui vivait avant l'ère platonicienne? et les inexactitudes véritables qu'on rencontre ne seront-elles pas des conséquences de ce que les considérations d'Hippocrate n'ont plus été entièrement comprises par Eudème et encore moins par Simplicius, ce qui a amené des malentendus surtout chez ce dernier, qui voulait conformer ces considérations aux doctrines d'Euclide?

Croyant qu'il faut répondre par l'affirmation à ces questions, je suis parvenu à expliquer certains passages d'une façon différente de celle des auteurs qui se sont occupés jusqu'à présent de la même matière.

Au commencement de son rapport Eudème dit selon Simplicius (Diels, p. 61$^{5-15}$)

ἀρχὴν μὲν οὖν ἐποιήσατο καὶ πρῶτον ἔθετο τῶν πρὸς αὐτοὺς χρησίμων, ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει τά τε ὅμοια τῶν κύκλων τμήματα πρὸς ἄλληλα καὶ αἱ βάσεις αὐτῶν δυνάμει. τοῦτο δὲ ἐδείκνυεν ἐκ τοῦ τὰς διαμέτρους δεῖξαι τὸν αὐτὸν λόγον ἐχούσας δυνάμει τοῖς κύκλοις· ὡς γὰρ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους ἔχουσιν, οὕτως καὶ τὰ ὅμοια τμήματα. ὅμοια γάρ τμήματά ἐστι τὰ τὸ αὐτὸ μέρος ὄντα τοῦ κύκλου, οἷον ἡμικύκλιον ἡμικυκλίῳ καὶ τριτημόριον τριτημορίῳ· διὸ καὶ γωνίας ἴσας δέχεται τὰ ὅμοια τμήματα.

Il prit donc un point de départ et établit comme la première des propositions utiles à son dessein que deux segments de cercle semblables ont entre eux le même rapport que leurs bases en puissance (les carrés de leurs bases). Il le prouvait en montrant que les diamètres en puissance ont le même rapport que les cercles; car le rapport des segments sera égal à celui des cercles. En effet, les segments semblables sont ceux qui font la même part du cercle, comme par exemple demi-cercle à demi-cercle, tiers de cercle à tiers de cercle. Par conséquent, les angles inscrits à des segments semblables sont égaux.

Le mot *δεῖξαι* a fait croire qu'HIPPOCRATE a donné une démonstration régulière du théorème sur la proportionnalité des aires des cercles avec les carrés des diamètres. C'est pourquoi HANKEL[1] rappelle la démonstration d'EUCLIDE, et il est vrai qu'aucune autre n'aurait satisfait les géomètres du temps d'EUDÈME, depuis qu'EUDOXE avait montré comment il faut compléter une simple exhaustion par une réduction à l'absurde pour en faire une véritable démonstration; mais ce serait sans doute un anachronisme d'attribuer à HIPPOCRATE une telle démonstration complète par exhaustion. PAUL TANNERY ne lui attribue donc qu'une simple exhaustion[2], et, certainement, ce procédé serait nécessaire pour étendre aux figures curvilignes les théories établies pour les figures rectilignes; mais nous ne savons rien d'une théorie des figures rectilignes et semblables établie systématiquement à son époque; rien n'indique, en effet, qu'une telle théorie assez développée se soit trouvée dans les Éléments d'HIPPOCRATE, dont nous parlerons plus tard. La seule chose que nous apprenne le passage cité, c'est qu'HIPPOCRATE a su que le rapport des cercles est égal à celui des carrés des diamètres. S'il n'a pas considéré le fait comme bien connu, il a pu tirer cette notion intuitivement de la seule inspection de deux cercles et de leurs carrés circonscrits, figures qui ne divergent entre elles que par l'étalon appliqué à leur construction. Que les aires homologues de telles figures sont proportionelles, voilà une vérité assez complexe selon nous, vérité que, sans doute, au temps d'HIPPOCRATE on n'a pas énoncée généralement, mais qu'on a osé appliquer à des cas particuliers longtemps avant qu'on n'ait pensé à la décomposer en des vérités plus simples et à fonder sur elles une démonstration régulière.

[1] Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. F. RUDIO attribue aussi la démonstration euclidienne à HIPPOCRATE. (Bibl. math. 3_3 p. 44.)

[2] Mémoires scientifiques III pag. 120. Bibliotheca mathematica 3_3, 1902.

Je ne crois donc pas qu'il faille prendre trop sérieusement l'expression δεῖξαι. EUDÈME, pour qui un savoir géométrique était inséparable d'une démonstration, mais qui ne critique ni ne commente les démonstrations d'HIPPOCRATE, a pu regarder quelques remarques assez insignifiantes de l'ancien géomètre comme devant servir à démontrer la vérité en question.

La démonstration de la proportionnalité analogue des segments qu'HIPPOCRATE déduit de celle des cercles a pu être de même nature et ainsi tout-à-fait conforme à celle que nous rapporte EUDÈME, malgré ses divergences par rapport à la marche que nous suivrions nous autres élèves d'EUCLIDE, divergences qui empêchent totalement SIMPLICIUS d'appliquer à la dite démonstration ses commentaires et citations d'EUCLIDE.

Selon EUDÈME, HIPPOCRATE s'occupe de la proportionnalité des segments sans se servir de l'intermédiaire de celle des secteurs. Le texte conservé semble même lui attribuer une définition de la similitude des segments qu'on préférerait aujourd'hui réserver à celle des secteurs. Voilà ce qui a amené M. F. RUDIO[1] a émettre une hypothèse très hardie sur l'explication du texte conservé. Il prétend que τμῆμα, désignant une partie d'un cercle, doit se traduire suivant les cas par „secteur" ou par „segment": aux 2e et 3e endroit de l'extrait cité, il traduit le mot par „secteur", aux autres par „segment".

Je ne crois pas que beaucoup de philologues acceptent l'hypothèse de M. RUDIO[2]. Pour moi elle devient inadmissible par le défaut de clarté d'un langage aussi ambigu, où il fau-

[1] Op. cit. p. 19 et p. 49 note 2; Bibliotheca Mathematica 3_3 p. 7—62 (1902) note 67, et 4_3 p. 16—17 (1903).

[2] Je renvoie à l'article de PAUL TANNERY (Mémoires scientifiques III pp. 119—130; Bibl. math. 3_3 (1902) pp. 342—349). M. F. RUDIO, qui traduit τριτημόριον par „Drittelkreis", prétend dans sa réplique déjà citée (Bibl. math. 4_3 p. 17) que par ce mot on ne peut désigner qu'un secteur; mais le mot ne signifie que „tiers" („troisième partie") de ..., et un segment peut aussi bien qu'un secteur être le tiers d'un cercle.

drait attribuer au même mot deux sens différents dans le cours de peu de lignes. M. RUDIO regarde une telle explication comme nécessaire pour comprendre le texte; mais cela ne ferait selon moi qu'aggraver la faute commise en négligeant de prévenir le lecteur du double emploi qu'on fait ici du même mot.

En même temps l'hypothèse de M. RUDIO n'est nullement nécessaire pour comprendre le texte conservé; celui-ci a sans elle un sens parfaitement clair, qui diffère seulement de celui qu'attendrait un élève d'EUCLIDE dans l'antiquité [1] et aujourd'hui. Il ne faut pas, en effet, attacher trop d'importance au fait qu'une des phrases rappelle par sa forme une définition de la similitude de deux segments de cercle. Cette forme peut dériver d'une modification assez légère, due à EUDÈME, du texte d'HIPPOCRATE, qui n'a pas probablement senti le besoin de définir explicitement les segments semblables. Il n'a trouvé aucune raison de douter de leur existence, et alors, conformément à ce que nous avons dit sur la proportionnalité des aires homologues de figures semblables, ils devaient être ceux qui sont proportionnels aux cercles, propriété dont l'auteur va faire usage. Il a ensuite conclu de la similitude que les angles inscrits aux mêmes segments sont égaux.

Il est vrai que l'expression de ces considérations est un peu pénible; mais cela s'explique 1° par la terminologie peu développée qui pouvait être à la disposition d'HIPPOCRATE et à laquelle il lui fallait suppléer par une certaine longueur dans les explications, et peut-être 2° par des essais faits par EUDÈME pour y suppléer au moyen de la terminologie de son époque.

Pour le premier point, on remarquera que les explications

[1] Voilà ce qui empêche selon moi de regarder l'explication relative aux segments semblables comme une addition de SIMPLICIUS, ce que font H. DIELS, P. TANNERY et J. L. HEIBERG.

d'HIPPOCRATE nous rappellent la définition de la proportionnalité de grandeurs commensurables qu'on trouve dans le 7e livre d'EUCLIDE; celle-ci est pourtant plus complète. Pour s'y conformer HIPPOCRATE aurait dû demander que les segments semblables forment „la même part $\left(\frac{1}{n}\right)$ ou les mêmes parts $\left(\frac{m}{n}\right)$" du cercle; mais les applications qu'il va en faire ensuite nous montrent que c'est la proportionnalité générale qu'il a en vue[1]. De même les exemples explicatifs „demi-cercle à demi-cercle, tiers de cercle à tiers de cercle", je les attribue plutôt à HIPPOCRATE qu'à SIMPLICIUS, contrairement à l'opinion de P. TANNERY, de H. DIELS et de J. L. HEIBERG; quel besoin avait-on de ces explications à l'époque de SIMPLICIUS, où l'on possédait toute la terminologie euclidienne?

Il faut remarquer encore qu'une considération intermédiaire des secteurs et des triangles dont les segments sont des différences ou sommes serait un long détour pour HIPPOCRATE, qui ne pouvait renvoyer à un traité géométrique s'occupant d'une manière assez complète de la similitude de ces dernières figures et des rapports de sommes et de différences.

Venons-en maintenant à la démonstration [H. DIELS p. 63,1—10] de ce que dans le trapèze $A\Gamma\Delta B$ (fig. 1) dont le côté $B\Delta$ a la grandeur $a\sqrt{3}$, les trois autres étant égaux à a, $B\Gamma^2 > 2a^2$, ou bien que l'angle $BA\Gamma$ est obtus. Dans le texte grec je mets entre crochets [ ] les parties que je n'attribue qu'à SIMPLICIUS[2] et entre parenthèses les lettres et un mot qui selon moi doivent s'être trouvés dans le texte d'EUDÈME. La traduction préalable est celle du texte complet de SIMPLICIUS.

[1] Au reste la manière dont il l'exprime ne diffère guère du langage populaire d'aujourd'hui.

[2] P. TANNERY, J. L. HEIBERG et F. RUDIO attribuent tout le passage cité à SIMPLICIUS. H. DIELS l'attribue à EUDÈME, à l'exception des renvois directs à EUCLIDE et de la dernière phrase.

[ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ *ΒΔ* τῆς *ΑΓ*, αἱ *ΔΓ ΒΑ* ἴσαι οὖσαι καὶ ἐπιζευγνῦσαι αὐτάς, ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται κατὰ τὸ *Ζ*] εἰ γὰρ παράλληλοί εἰσιν αἱ [*ΒΑ*] (*ΕΑ*) *ΔΓ* [ἴσαι οὖσαι, αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπιζευγνῦσαι καὶ αὐταὶ ἴσαι καὶ παράλληλοί εἰσιν, ἔσται ἡ *ΑΓ* ἴση τῇ *ΒΔ*, ὅπερ ἀδύνατον] συμπιπτουσῶν δὲ τῶν *ΒΑ ΔΓ* κατὰ τὸ *Ζ* αἱ ὑπὸ *ΖΑΓ ΓΑΒ* γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι ἔσονται [διὰ τὸ ιγ̅ τοῦ πρώτου τῶν Εὐκλείδου], μείζων δὲ ἡ ὑπὸ *ΓΑΒ* τῆς ὑπὸ *ΓΑΖ* [ἡ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου τῆς ἐντὸς *** διὰ τὸ λβ̅ τοῦ πρώτου]. ἡμίσεια [ἄρα] (γὰρ) ἡ ὑπὸ *ΓΑΖ* γωνία ἐστὶ τῆς ὑπὸ [*ΒΑΓ*] (*ΕΑΖ*).

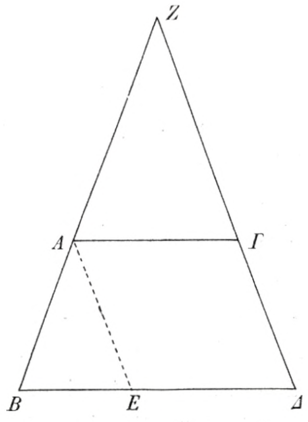
En effet, *ΒΔ* étant plus grand que *ΑΓ*, les prolongements des droites égales *ΔΓ* et *ΒΑ* qui les joignent iront se rencontrer en *Ζ*; car si les droites égales *ΒΑ* et *ΔΓ* étaient parallèles et si les droites joignant ces droites égales et parallèles étaient de même égales et parallèles, *ΑΓ* serait égale à *ΒΔ*, ce qui est impossible; mais *ΒΑ* et *ΔΓ* se rencontrant en *Ζ*, les angles *ΖΑΓ* et *ΓΑΒ* feront deux droites — selon la 13ᵉ proposition du premier livre des Éléments d'Euclide —; mais *ΓΑΒ* est plus grand que *ΓΑΖ*, l'angle extérieur d'un triangle que l'angle intérieur *** selon la 32ᵉ proposition du premier livre. L'angle *ΓΑΖ* est donc la moitié de *ΒΑΓ*.

Dans le texte conservé par Simplicius la dernière phrase contient une faute évidente[1], qu'on pourra corriger en substituant au dernier angle *ΒΑΓ* l'angle *ΕΑΖ*, le point *Ε* étant celui[2] où la droite *ΑΕ* qui est parallèle à *ΓΔ* rencontre *ΒΔ*.

[1] P. Tannery dit qu'il en désespère (préface de H. Diels p. XXVIII), et F. Rudio n'hésite pas à l'effacer comme „sinnloses Einschiebsel" (p. 54; voir aussi Bibl. math. 3_3 p. 49).

[2] Je choisis d'appeler *E* ce point omis par Simplicius, parce qu'ainsi, tout en attribuant à Simplicius — de même que tous les éditeurs cités. — la construction du cercle circonscrit dont il appelle le centre *E* (H. Diels p. 62^{24-30}), on comprend néanmoins que les notations d'Eudème se soient étendues jusqu'à l'usage de la lettre *Z*. Nous ne tenons pas même pour impossible que dans la figure parvenue à Simplicius la lettre *E*

Alors HIPPOCRATE aura démontré par la dite phrase que ΓAB est plus grand que ΓAZ, ce que SIMPLICIUS montre par un renvoi à un théorème d'EUCLIDE, que du reste EUCLIDE démontre en faisant usage de la même parallèle. Les efforts faits pour tout rapporter à EUCLIDE auront empêché SIMPLICIUS de comprendre une phrase qui aurait rendu superflu son renvoi à EUCLIDE I,13; mais heureusement il a été assez consciencieux pour la conserver néanmoins mais sous une forme peu correcte. Croyant qu'elle contenait une conclusion, il aura aussi substitué ἄρα (donc) à γὰρ (car).



Mais où trouver l'introduction de la parallèle AE dont selon moi HIPPOCRATE aurait dû faire usage? Je crois que le malentendu de SIMPLICIUS lui a fait en effacer involontairement les traces, ce qu'il a pu faire par des modifications très légères du texte et par des additions contenant ses propres explications. Pour restituer le texte que j'attribue à EUDÈME, il suffit de substituer E à B au commencement de la seconde phrase citée et d'effacer les additions que j'attribue à SIMPLICIUS et que dans ma citation j'ai marquées par des crochets. Par suite des remaniements dus à SIMPLICIUS la dite phrase est devenue une démonstration de l'intersection des droites AB et $\Gamma\Delta$; sans elles il reste une introduction de la parallèle AE.

d'EUDÈME ait été écrite de telle sorte qu'il l'ait prise pour centre du cercle(?); alors l'existence de la droite AE sur la figure aurait contribué à lui faire construire ce centre au moyen de la bissectrice de l'angle $BA\Gamma$ (et non pas au moyen de celle de la droite AB), et on comprendra qu'il ait regardé comme erroné l'usage de la lettre E que nous proposons ici de restituer dans le texte dont nous nous occupons actuellement.

En ne démontrant pas que les droites AB et $\Gamma\Delta$ se rencontrent, HIPPOCRATE et EUDÈME n'ont pas eu besoin de le dire expressément[1]. J'attribue donc aussi à SIMPLICIUS l'addition de la première phrase citée, la notation Z du point d'intersection étant indiquée après.

On verra par la traduction suivante du texte que nous attribuons à EUDÈME, que les additions et menues altérations attribuées ici à SIMPLICIUS lui avaient donné un sens assez différent. EUDÈME ne se serait pas rendu non plus coupable de l'introduction d'un trop grand nombre de conditions, ce qui a dû choquer le lecteur du texte de SIMPLICIUS.

„En effet, si les droites EA et $\Delta\Gamma$ sont parallèles, et BA et $\Gamma\Delta$ se rencontrent en Z, les angles $ZA\Gamma$ et ΓAB formeront deux droites; mais ΓAB est plus grand que ΓAZ, parce que l'angle ΓAZ est la moitié de EAZ".

Il s'ensuit que l'angle $BA\Gamma$ est obtus, ce qu'il fallait démontrer.

En faveur de l'usage de AE que nous attribuons ainsi à HIPPOCRATE nous ferons encore observer qu'il s'en est probablement servi déjà pour construire un trapèze à côtés donnés, construction dont EUDÈME ne nous a laissé aucune description, et que probablement aussi HIPPOCRATE a regardé comme connue ou comme assez simple pour négliger d'en rendre compte. Alors le plus naturel est de lui attribuer une construction du trapèze commençant par celle du triangle BAE dont les côtés sont égaux aux côtés non parallèles et à la différence des côtés parallèles du trapèze[2].

De même que nous attribuons ici à EUDÈME une partie

[1] A cet égard je partage l'opinion de P. TANNERY et F. RUDIO. Il aurait été du reste aussi nécessaire de dire de quel côté se trouve ce point d'intersection.

[2] Cette construction, qui est en vérité la plus simple, se sera présentée à un géomètre assez ignorant de toute espèce d'algèbre, mais très-versé dans l'usage du compas et de la règle, plutôt que celle que propose P. TANNERY (voir H. DIELS p. XXVIII).

essentielle des lignes citées, les principes que nous suivons nous portent à nous joindre aussi ailleurs à H. DIELS pour lui conserver plusieurs parties que P. TANNERY[1] et F. RUDIO ne croient pas dignes d'HIPPOCRATE. En particulier je considère comme dérivant d'HIPPOCRATE l'illustration numérique pénible (H. DIELS p. 66^{24}—67^{2}) du fait que (pour parler le langage mathématique moderne)

$$EZ^2 = \frac{3}{2} EK^2 \text{ et } EK^2 > 2 KZ^2$$

amènent:

$$EZ^2 > EK^2 + KZ^2.$$

En effet, tandis que SIMPLICIUS (même privé des facilités que procure notre langage algébrique) aurait pu se contenter d'un renvoi aux axiomes 2 et 8 du 1^er^ livre d'EUCLIDE[2] on commence dans le texte par remarquer que

$$EZ^2 = \frac{3}{2} EK^2 \text{ et } EK^2 = 2 KZ^2 \text{ amèneraient } EZ^2 = EK^2 + KZ^2$$

parce qu'alors $EZ^2 : EK^2 : KZ^2 = 6 : 4 : 2$, et on se contente ensuite d'illustrer l'usage des inégalités par un exemple numérique: „Soit par exemple le rapport de EK^2 (qui doit être $> 2 KZ^2$) à $KZ^2 = 4 : 1$; alors $EZ^2 > EK^2 + KZ^2$ (parce que $6 > 5$)."

Voilà précisément la manière dont on a su se tirer d'affaire presque partout à des époques où on n'avait pas les moyens d'exprimer d'une manière générale un calcul général ou une conclusion relative à un tel calcul. Dans des cas de ce genre, mais plus difficiles, DIOPHANTE a encore recours à ce procédé, tout comme les Indiens, et se sert d'un exemple numérique qui illustre bien comment on peut exécuter aussi en général le même calcul ou faire la même conclusion. Je trouve très probable qu' HIPPOCRATE a exprimé sa conclusion de cette ma-

[1] Quant on passage dont je vais m'occuper ici P. TANNERY a pourtant adopté plus tard des vues semblables à celles que je défendrai (Mémoires scientifiques III, p. 130; Bibliotheca math. 3^3 p. 348—9).

[2] Ou plus immédiatement à l'axiome pseudoeuclidien 4, s'il existait de son temps (Ed. Heiberg t. I p. 10).

nière archaïque, semblable à celle qui lui a servi à expliquer la proportionnalité des segments semblables aux cercles (p. 451). Elle n'est nullement indigne de lui, mais elle montre seulement les défauts de la terminologie et des conventions scientifiques qui étaient à sa disposition et à celle de ses lecteurs.

Le même commentaire de Simplicius contient aussi un rapport sur la quadrature d'Antiphon. Il se rattache à une déclaration d'Aristote que Simplicius commence par rappeler (H. Diels p. 54). Aristote dit[1]: „Il ne faut pas du reste réfuter tout, mais seulement les erreurs qu'on démontre en partant des principes (*ἀλλ' ἢ ὅσα ἐκ τῶν ἀρχῶν τις ἐπιδεικνὺς ψεύδεται*) et non pas les autres; c'est par exemple l'affaire d'un géomètre de réfuter la quadrature au moyen des segments mais non pas l'affaire d'un géomètre de réfuter celle d'Antiphon."

Aristote dit donc qu'Antiphon ne part pas des principes géométriques. Ces principes doivent être ceux que posait l'École de Platon et qui caractérisent ce que nous appelons à présent géométrie de précision; mais Aristote ne dit nullement qu'Antiphon ait prétendu en faire usage. Au contraire, s'il avait émis la prétention de partir des principes de cette nouvelle géométrie, ce devait être l'affaire d'un géomètre de montrer qu'il s'était trompé.

Le point de vue dont il faut juger le procédé d'Antiphon, c'est donc de le regarder comme une géométrie d'approximation. Il a montré une méthode pour s'approcher de plus en plus de l'aire du cercle, méthode par laquelle on peut en réalité se procurer une approximation suffisante pour chaque but pratique qu'on se pose. Celui qui reproche à Socrate de ne pas retirer un gain de ses leçons[2] aura été content de ce résultat pratique.

[1] 1,185a, 14—17 (H. Diels, Vorsokratiker II, p. 294, 5—8).
[2] Xenophon, Memorabilia I, 6.

D'autre part, à une époque où il s'agissait de faire comprendre les principes de la géométrie de précision, la quadrature d'Antiphon a offert un excellent exemple pour illustrer ces principes en montrant en quoi elle est en désaccord avec eux. Selon Simplicius (H. Diels p. 55[23]) Eudème s'en est occupé[1] et après lui Themistius, Simplicius et Philoponus.[2] On a trouvé un autre exemple illustrant la même divergence de principes, en reprochant[3] à Démocrite d'avoir examiné si deux sections d'un cône par deux plans parallèles à la base et infiniment voisins devaient être considérées comme égales ou inégales, sans doute en visant sa démonstration de l'égalité d'un cône avec le tiers d'un cylindre de même base et de même hauteur (p. 431).

La manière dont Antiphon s'approche du cercle est la suivante. Il commence par y inscrire un polygone régulier connu, selon Themistius un triangle, selon Simplicius un carré, et ensuite, dans les segments qui restent, des triangles ayant pour bases celles des segments et dont les deux autres côtés sont égaux, et il continue à faire de même pour les segments qui restent encore, et ainsi de suite.

Croyant qu'il s'agit d'une question de géométrie de prècision, nos rapporteurs ne parlent que d'une construction des dits triangles et d'une construction d'un carré égal au polygone régulier inscrit résultant de l'addition des triangles au premier polygone; mais déjà leur ignorance sur le nombre des côtés du polygone dont Antiphon est parti indique qu'ils ne connaissent pas le détail de ses opérations. Or les dites constructions n'intéresseraient guère au point de vue de la géométrie d'approximation. Pour obtenir une construction approximative on pourrait aussi bien, comme le ferait un arpenteur, inscrire tout

[1] Dans son Histoire des Mathématiques ou, comme le croit P. Tannery (La géométrie grecque p. 115), dans son commentaire, également perdu, à la Physique d'Aristote.

[2] Le livre cité de F. Rudio contient leurs considérations.

[3] Plutarque (Adv. Stoic. de commun. notit., cap. 39, § 3).

de suite dans le cercle un polygone quelconque dont seulement les sommets seront assez voisins. Pour mériter la mention des philosophes et des géomètres, le procédé d'approximation d'Antiphon doit avoir consisté en un calcul successif des aires des figures introduites. Le diamètre du cercle étant donné, ce calcul ne lui a pas été difficile pour le carré, le triangle ou l'hexagone; il a pu trouver au moyen du théorème de Pythagore la hauteur du triangle inscrit à un segment de base donnée et ensuite les côtés égaux, bases de nouveaux segments.

La valeur du travail d'Antiphon dépend de la question de savoir jusqu'à quel point il a poussé ce calcul; mais quoi qu'il en soit, il a dû indiquer un procédé servant à calculer approximativement l'aire du cercle et qu'on peut pousser aussi loin qu'on veut, c'est-à-dire un véritable procédé d'exhaustion. Seulement il a sans doute regardé comme évident qu'il obtient ainsi une véritable approximation infinie à l'aire du cercle; mais la formulation qui exprime une telle approximation, en demandant qu'on puisse rendre la différence du cercle et des polygones plus petite que toute grandeur donnée (Euclide XII,2), n'était pas même encore inventée alors par Eudoxe. Ce n'est qu'une telle formulation qui rend possible de faire une véritable démonstration par exhaustion du fait que l'aire du cercle est, dans le sens actuel de ce mot, la limite des polygones inscrits.

Rien n'indique même qu'Antiphon ait essayé de contrôler le degré d'approximation obtenu par chaque nouveau polygone. Ce qu'on raconte de Bryson montre du reste qu'au moins peu de temps après lui on a commencé de penser au moyen qui devait fournir un tel contrôle, autrement dit à l'usage des polygones circonscrits à côté de polygones inscrits. On lui attribue la conclusion qu'un polygone (carré) intermédiaire à un polygone (carré) inscrit et à un polygone (carré) circonscrit devrait être égal au cercle parce que *τὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ μείζονα καὶ ἐλάττονα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν*, ce qu'il faut traduire ici par: „des quantités plus grandes qu'une quantité et plus petites qu'une autre quantité sont égales entre elles.“ [1] Cette conclusion est en tout cas trop absurde pour avoir mérité d'être conservée; mais il est possible que dans ce cas aussi on se soit saisi d'un exemple servant à illustrer la différence entre la géométrie d'approximation et la géométrie de précision, et que cet exemple ait pris peu à peu la forme extrême et absurde qui nous a été conservée. En ce cas, BRYSON lui-même se serait seulement procuré une approximation, qu'il croyait meilleure, à l'aire du cercle, en prenant un intermédiaire, par exemple la moyenne arithmétique entre l'aire d'un polygone inscrit et celle d'un polygone circonscrit.

Même dans ce cas BRYSON ne se serait pas soucié de savoir si son approximation péchait par défaut ou par excès. C'est seulement ARCHIMÈDE qui a démontré les inégalités $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$ aussi rigoureusement que jusqu'alors on avait démontré des égalités. Pour y parvenir il avait besoin, non seulement de calculer par approximation les périmètres de polygones inscrits et circonscrits, mais aussi de choisir convenablement les approximations, — par défaut ou par excès, — aux racines carrées dont il devait faire usage.

Avant PLATON on s'était encore occupé d'une courbe dont le nom de „quadratrice“ (τετραγωνίζουσα) révèle déjà ses rapports avec la quadrature du cercle. Dans son commentaire à EUCLIDE [2], PROCLUS attribue la dite courbe à HIPPIAS d'Elis, et PAPPUS [3], qui pour des raisons dont nous allons parler ne l'attribue qu'à DINOSTRATE, en donne la description suivante: Soient donnés un carré $AB\Gamma\Delta$ et le quart d'une circonférence de cercle

[1] Si BRYSON, dont on ne sait que très peu de chose, avait dit „quantités plus grandes et plus petites que les mêmes quantités“ sa phrase exprimerait le principe d'EUDOXE sous la forme de DEDEKIND, forme adoptée dans la théorie antique des proportions. Il paraît que P. TANNERY ne regarde pas comme absolument impossible une explication en ce sens (La géométrie grecque, p. 115).

[2] Ed. FRIEDLEIN p. 272 et 356.

[3] Ed. HULTSCH I p. 250.

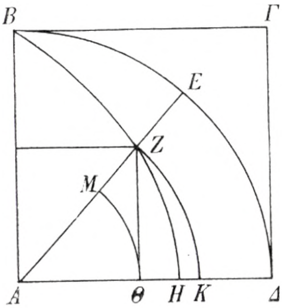


Fig. 2.

$B E \varDelta$ de centre A et de rayon AB. Sur un rayon quelconque AE on détermine un point Z dont la distance de AB est ΘZ, de sorte que

$$B\varDelta : E\varDelta = BA : Z\Theta.$$

PAPPUS commence du reste par exprimer la même chose en disant qu'en même temps le point B parcourt le quadrant $BE\varDelta$ et la droite $B\Gamma$ l'intervalle jusqu'à $A\varDelta$ (bien entendu, en restant parallèle à cette droite) de mouvements uniformes. Alors la quadratrice BZH sera le lieu de l'intersection Z du rayon mobile AE et de la droite mobile. Probablement la manière d'exprimer la proportion au moyen de lignes mobiles remonte à HIPPIAS.

En posant le rayon $AB = a$, les coordonnées rectangulaires de Z $A\Theta = x$, $\Theta Z = y$, et les coordonnées polaires $\varDelta AZ = \vartheta$ et $AZ = r$ et en faisant usage de notations modernes, nous aurons

$$\vartheta : \frac{\pi}{2} = y : a$$

ou bien

$$y = \frac{2a}{\pi}\vartheta, \tag{1}$$

qui sera l'équation de la courbe en coordonnées mixtes. Il en résulte aussi l'équation en coordonnées polaires

$$r = \frac{2a}{\pi}\frac{\vartheta}{\sin\vartheta} \tag{2}$$

et une autre équation mixte

$$x = \frac{2a}{\pi}\frac{\vartheta}{tg\,\vartheta}. \tag{3}$$

Si nous revenons aux notations de la figure, les vérités exprimées par les équations (1)—(3) étaient pour les anciens de simples conséquences de la proportion servant à définir la courbe.

On voit immédiatement que la courbe pouvait servir à diviser un angle en un nombre quelconque de parties égales, soit qu'on ait divisé l'angle ϑ en divisant la hauteur y, ou, plus conformément à la description originaire, l'angle BAZ en divisant $BA—Z\Theta$.

Le segment AH que la courbe fait sur la droite $A\varDelta$ est égal à $\frac{2a}{\pi}$, ce que nous voyons en donnant à ϑ, dans les équations (2) et (3), une valeur infiniment petite et en remarquant que

$$\lim. \frac{\sin\vartheta}{\vartheta} = \lim. \frac{tg\vartheta}{\vartheta} = 1.$$

Cette valeur s'attache à la détermination de π ou bien à la rectification et ainsi à la quadrature du cercle. C'est à cette circonstance que la courbe doit son nom.

On voit ainsi que la quadratrice allait présenter à la géométrie théorique le même avantage que plus tard la spirale d'ARCHIMÈDE: celui d'être une courbe soumise à une définition géométrique au moyen de laquelle on peut diviser un angle, et à laquelle s'attache une grandeur servant rigoureusement à la quadrature du cercle, seule manière de résoudre des problèmes de cette nature qui satisfasse aux exigences théoriques des Grecs après PLATON.

Cependant l'invention de la courbe d'HIPPIAS remonte à une époque où on ne posait pas encore ces exigences théoriques, et plus tard on n'attribua la découverte de la propriété servant à la quadrature du cercle qu'à l'élève d'EUDOXE, DINOSTRATE, qui en a donné le premier une démonstration satisfaisante, à savoir celle que nous communique PAPPUS.

On démontre que $\frac{2a}{\pi}$ n'est ni plus grand ni plus petit que AH. En effet, dans le premier cas un cercle de rayon $AK = \frac{2a}{\pi}$ contiendrait le point H et rencontrerait par conséquent la courbe en un point Z dont la rayon vecteur $r = \frac{2a}{\pi}$; l'équation (2) donnerait donc $\sin\vartheta = \vartheta$ (ou bien, comme l'exprime PAPPUS, dont les lettres varient du reste d'une figure à l'autre,

$\Theta Z = ZK$), ce qui est impossible. Dans le second cas la droite $x = \frac{2a}{\pi}$ rencontrerait la courbe en un point Z pour lequel on aurait selon l'équation (3) $tg\,\vartheta = \vartheta$ (ou bien, comme l'exprime PAPPUS, $M\Theta = \Theta Z$), ce qui est également impossible.

On voit que DINOSTRATE, sans le dire expressément, part, comme ARCHIMÈDE dans sa Mesure du cercle,[1] de la supposition que la circonférence d'un cercle est plus grande que le périmètre d'un polygone inscrit, mais plus petit que celui d'un polygone circonscrit. Sans faire usage de la terminologie trigonométrique, inconnue alors, DINOSTRATE démontre que $\lim. \frac{\sin x}{x} = \lim. \frac{tg\,x}{x} = 1$ en partant, comme nous le faisons aujourd'hui, de $\sin x < x < tg\,x$.

L'explication la plus immédiate du fait que PAPPUS n'attribue qu'à DINOSTRATE la détermination à laquelle la courbe d'HIPPIAS doit son nom, serait celle que ce nom ne lui aurait été donné que par DINOSTRATE ou par un de ses successeurs. Cependant P. TANNERY, qui s'était antérieurement contenté de cette explication, a fait remarquer[2] plus tard qu'en s'occupant de la construction pratique de la courbe, HIPPIAS n'a pu manquer d'observer la détermination en question de AH, et j'adopte entièrement sa conclusion.

En effet, l'usage pratique du fait que nous exprimons à présent par $\lim. \frac{x}{\sin x} = 1$ a dû précéder l'observation que ce fait, évident par une figure, avait besoin d'un énoncé précis et d'une démonstration rigoureuse. Dans le cas qui nous occupe HIPPIAS a dû voir qu'en même temps que dans notre figure E s'approche de Δ, le rapport de $E\Delta$ à $Z\Theta$ s'approchera indé-

[1] Ce n'est probablement que plus tard qu'ARCHIMÈDE a énoncé, dans son premier livre sur la sphère et le cylindre, les postulats généraux servant à définir la longueur d'une courbe plane quelconque (2e éd. de HEIBERG, p. 8; voir mon article: Ueber einige archimedische Postulate, Archiv für die Geschichte der Naturwissensch. I).

[2] Bulletin des Sciences mathématiques 1883 p. 281. TANNERY, Mémoires scientifiques II, p. 6.

finiment de celui de $E\Delta$ à ZK ou de celui de BA à AZ, qui s'approche en même temps de AH.

Il faut se rappeler encore que l'existence de ces notions chez Hippias et chez ceux qui ont fait après lui usage de sa courbe n'aurait nullement empêché les élèves de l'école de Platon et d'Euclide de n'attribuer la découverte en question qu'à celui qui en avait donné une démonstration formelle, jugée digne d'être conservée: ils devaient attribuer la découverte du théorème à Dinostrate, comme ils ont attribué celle du volume du cône à Eudoxe (p. 432).

L'usage pratique de la quadratrice suppose, comme le dit Paul Tannery, la construction d'un patron découpé en équerre BAH avec la quadratrice BH remplaçant l'hypoténuse. On a pu construire exactement une série de points de la courbe correspondant aux parties constructibles d'un angle droit. En joignant ces points par une courbe on peut déterminer assez commodément au moyen de cette courbe, c'est-à-dire par une sorte d'interpolation graphique, des parties quelconques d'un angle donné. Théoriquement la détermination de H qui conduirait à la quadrature du cercle, dépendrait d'une extrapolation ou d'une prolongation de la courbe au-delà des points construits; mais pratiquement cette construction ne donnerait qu'une approximation très faible; car pour de petites valeurs de ΔE les droites servant à déterminer les points Z se rencontrent sous des angles trop aigus. Pour utiliser pratiquement le rapport de AH à AB il fallait inversement s'en servir pour construire le point H de la courbe. En effet, le dit rapport n'était pas absolument inconnu: on pouvait se servir des approximations égyptiennes de π, ou, beaucoup mieux, on pouvait mesurer au moyen d'un ruban la circonférence d'une roue, ce qui donnait, une fois pour toutes, une excellente détermination graphique du rapport π, permettant ensuite de construire la longueur $\frac{2a}{\pi}$ de AH et de déterminer ainsi le point H. Une telle construction de l'extrémité de la courbe avait d'autant plus de valeur que la construction directe des points voisins était difficile.

Un appareil construit de cette manière ne répondrait nullement aux exigences théoriques relatives à la trisection rigoureuse de l'angle et à la quadrature rigoureuse du cercle, questions qui en ce temps n'étaient qu'à peine à l'ordre du jour; mais son utilité pratique lui donnait sa raison d'être. A une époque où l'astronomie se servait plus de constructions mécaniques et graphiques que de calculs, il devait être bon d'avoir un instrument permettant de diviser assez commodément et assez exactement des arcs donnés selon des rapports donnés, ceux des temps nécessaires pour parcourir ces arcs suivant des mouvements uniformes; et une fois construit le même instrument contenait des droites dont le rapport est $\frac{\pi}{2}$, et présentait ainsi pour les opérations graphiques le même avantage que la connaissance numérique de π dans nos calculs. Ce dernier avantage justifiait le nom de „quadratrice" mieux que ne le fit plus tard l'application théorique, mais assez illusoire au point de vue pratique, de la courbe rigoureusement définie pour trouver la quadrature du cercle.

Quoi qu'il en soit, la génération continue de la courbe par le point d'intersection de droites mobiles nous montre par un bel exemple que même avant la création d'une géométrie rigoureuse il était possible de concevoir et d'exprimer une telle génération suivant une loi donnée: nos transcriptions (1)—(3) au moyen des symboles des coordonnées n'y ajoutent rien d'essentiel, mais servent seulement à montrer la portée de la dite conception.

Il n'est donc pas étonnant qu'après la formation d'une géométrie systématique on se soit emparé de cet exemple d'une courbe bien définie pour y appliquer les méthodes nouvelles et rigoureuses. Dinostrate a démontré son rapport avec la rectification du cercle; d'après Pappus, Nicomède et d'après un passage de Jamblique, cité par

P. TANNERY[1]. APOLLONIUS s'en sont occupés eux aussi. Quant aux études qu'on y a rattachées, PAPPUS nous apprend que la dite courbe est la projection de l'intersection d'une surface de vis à filet carré avec un plan.

Nous nous bornerons ici à cet examen de documents assez connus sur l'ancienne géométrie, documents dont il a été relativement facile de distinguer le contenu positif de ce qui concerne la préparation à la géométrie de précision. Il serait plus difficile, dans les communications relatives à la géométrie des Pythagoriciens, de discerner les efforts faits pour donner aux recherches une généralité qui les rende indépendantes de la rationnalité des grandeurs qui font leur objet, des connaissances antérieures qu'on a voulu généraliser ou qui fournissent le moyen d'une telle généralisation. Probablement on ne saura jamais, par exemple, si les Pythagoriciens ont connu la résolution numérique des équations quadratiques avant de leur donner la forme géométrique et générale que présentent les „applications" elliptiques ou hyperboliques, ou si inversement les solutions sont le fruit des recherches géométriques. La célèbre construction d'ARCHYTAS a évidemment le but théorique d'attacher l'existence des deux moyennes proportionnelles à des surfaces et courbes bien définies; mais sa faculté d'engendrer une courbe gauche par des mouvements bien définis devient plus intelligible lorsqu'on se rappelle la génération antérieure de la quadratrice d'HIPPIAS.

Des contributions plus riches à la connaissance du savoir et du pouvoir géométriques que les Grecs ont possédés avant la formation du système géométrique ou acquis indépendemment de cette formation ont été et pourront encore être demandées à une autre source, je veux dire à l'Astronomie grecque. La partie géométrique de cette science se référait

[1] Bulletin des Sciences mathématiques 1883, p. 283; Mémoires scientifiques II p. 7.

en effet à la Sphérique dont les méthodes ne devaient pas leur développement à l'intérêt géométrique qu'elles pouvaient présenter, mais à leur utilité pour réaliser les buts pratiques de l'astronomie. Aussi celui qui connaît les Éléments d'EUCLIDE et croit y trouver, — abstraction faite de la géométrie supérieure qui commença par la découverte des coniques, — une image assez complète de l'étendue de la géométrie à l'époque d'EUCLIDE, s'étonnera de la sûreté avec laquelle les astronomes antérieurs à lui manient les différents grands cercles d'une sphère, composent les vitesses de mouvements contemporains d'un astre et se servent de la géométrie descriptive pour construire des cadrans solaires. Le dernier fait étonne moins depuis qu'on a trouvé en Égypte le dessin d'une colonne exécuté en projection horizontale et verticale.

Sans y insister pour le moment — ce qui demanderait des études nouvelles et détaillées des renseignements relatifs à l'astronomie ancienne, — nous nous contenterons de remarquer qu'un développement assez considérable de la stéréométrie a été lié à l'Astronomie. On trouvera peut-être que ce fait ne s'accorde pas avec le reproche que PLATON[1] adresse aux géomètres de ne pas s'occuper assez de la stéréométrie; mais la contradiction disparait si l'on se souvient que ce ne sont pas les résultats géométriques, mais la géométrie systématique en formation sous les yeux de PLATON, géométrie fondée sur des définitions et postulats précis, qui était l'objet de son intérêt et de ses exhortations. Il voulait qu'on étendît ce système rigoureux à la stéréométrie aussi bien qu'à la planimétrie[2]. En cela il n'avait pas tort; car EUCLIDE expose encore dans ses Éléments les principes de la stéréométrie d'une manière moins complète et moins rigoureuse que les principes planimétriques.

[1] Dans le 7e livre de la République.

[2] Comparer HEIBERG: Naturwissenschaften und Mathematik im klassischen Altertum, Leipzig 1912, p. 49.

Les recherches que nous avons entreprises ici ainsi que celles que nous venons de recommander relativement à l'astronomie ne nous donnent pas les dates de la découverte des vérités fondamentales dont les auteurs font usage, mais seulement des dates ante quas. Nous voyons qu'HIPPOCRATE possède complètement la notion d'un angle et les propriétés des parallèles, — mais non pas la théorie toute particulière de ces droites que nous trouvons dans EUCLIDE, — et ses opérations nous montrent que la somme des angles d'un triangle ne lui était pas inconnue non plus que l'égalité des angles inscrits à un segment de cercle. Les Pythagoriciens de son temps ou même, anterieurs à lui ont possédé du moins les premières de ces connaissances. Les usages que fait HIPPOCRATE du „théorème de PYTHAGORE" et du théorème inverse pour décider si certains angles sont aigus, droits ou obtus nous montrent que la connaissance de ce théorème n'était nullement nouvelle à son époque. D'autre part, nous avons montré ailleurs[1] qu'il faut rapporter aux premiers Pythagoriciens et probablement à PYTHAGORE lui-même l'idée de se demander si une grandeur est rationnelle et la découverte que cela n'a pas lieu pour certaines racines carrées, en particulier pour $\sqrt{2}$. Or on a du premier coup mis la question de l'irrationnalité en rapport avec le théorème relatif aux carrés faits sur les côtés d'un triangle rectangle. Selon moi le dit théorème a donc été connu de PYTHAGORE, soit qu'il lui ait été transmis, soit qu'il ait été trouvé par le philosophe lui-même.

Je suis de plus en plus disposé à préférer la première de ces alternatives[2]. Je crois donc que PYTHAGORE et HIPPOCRATE doivent leur connaissance à une source commune non

[1] Sur les livres arithmétiques des Éléments d'EUCLIDE. Bulletin de l'Ac. de Danemark 1910, p. 395—435 et en particulier p. 431—432.

[2] Dans un travail sur „Die Geometrie des PYTHAGORAS" (Bibl. math. 9_3) M. HEINRICH VOGT a montré que la tradition qui attribue le théorème à PYTHAGORE n'est fondée sur aucun document historique sérieux; mais cela me dispose plutôt à attribuer son origine aux temps où la Géométrie

pas écrite mais venant de l'Égypte ou de l'Orient et propagée oralement.

A cet égard il faut premièrement rappeler que les Égyptiens ont su au moins que le triangle de côtés 3, 4, 5 est rectangle, et nous avons des renseignements plus détaillés sur la connaissance plus complète du théorème dans des contrées plus reculées et des applications qu'on en faisait dans ces pays longtemps avant Pythagore. Nous pensons aux Sulbasutras indiens. En les lisant on est frappé de la similitude des anciennes connaissances et théories indiennes avec celles qui ont été les points de départ ou les premiers fruits des études des Pythagoriciens. La figure, appelée „gnomon" par les Grecs, qui se présente comme la différence de deux carrés à deux côtés communs est utilisée dans l'Inde pour déterminer, comme dans l'arithmétique géométrique grecque, des triangles à côtés exprimables en nombres entiers, et même pour construire (comme Euclide II,14) un carré égal à un rectangle donné; et on fait usage du „théorème de Pythagore" pour construire un carré égal à la somme de deux autres ou égal à un multiple d'un autre et même pour exécuter la même chose avec d'autres figures semblables.

Nous ne disons pas que ces notions aient été transmises des Hindous aux Grecs; mais il est assez probable que le théorème de Pythagore était depuis longtemps en la possession des anciens peuples orientaux: découvert, nous ne savons ni où (en Égypte?) ni de quelle manière, une vérité facile à exprimer se sera alors propagée d'un pays à un autre

était encore plutôt une art qu'une science. En des temps où l'étude plus scientifique avait commencé, on aurait été trop frappé soit de la grande portée des applications géométriques du théorème, soit de son utilité pour les recherches plus théoriques qui ont rapport aux grandeurs irrationnelles, pour qu'on en eût oublié l'auteur. — Dans une analyse de mon article de „Die Kultur der Gegenwart" sur les Mathématiques de l'Antiquité et du moyen-âge, M. Eneström s'étonne que j'estime le théorème connu de Pythagore. Il en trouvera l'explication soit dans mon mémoire déjà cité sur les livres arithmétiques d'Euclide soit ici.

grâce à son utilité pratique pour les architectes, les arpenteurs et les astronomes, grâce à l'usage rituel qu'on en aura fait aussi ailleurs qu'en Égypte et dans l'Inde, et peut-être parfois aussi à la curiosité qui est l'origine de la science. Surtout les applications rituelles auront contribué à donner, en des lieux différents et malgré la différence des cultes, aux connaissances qui s'y attachaient des formes semblables, ce qui peut servir à expliquer la similitude entre celles que nous trouvons chez les Hindous et les premiers pas de la géométrie Pythagoricienne.

Pythagore de Samos et les géomètres de Chios auraient donc puisé les mêmes doctrines à la même source orientale, et Hippocrate n'a pas eu besoin d'en devoir la connaissance aux Pythagoriciens, dont les théories géométriques, d'après ce que nous avons déjà dit sur leur arrivée à Athènes, n'ont été connues qu'assez tard par les autres Grecs. Même la similitude (que nous avons mentionnée) de sa représentation de $a\sqrt{3}$ avec celle dont les Pythagoriciens font usage ne prouve aucune influence de leur part, vu qu'elle ne diverge guère des considérations que nous trouvons dans les Sulba-sutras.

Malgré tout Pythagore mérite bien qu'on appelle toujours „théorème de Pythagore“ le théorème relatif aux carrés des côtés d'un triangle rectangle. Dans sa main et dans celles de ses élèves la vérité exprimée par ce théorème, dont on faisait alors depuis longtemps des applications pratiques, devint la première pierre fondamentale de la géométrie de précision qu'ils commençaient de constituer après la découverte des grandeurs irrationnelles.

Ce qui contribuerait plus que d'autres documents à nous faire connaître la nature de la géométrie antéplatonicienne, ce serait la connaissance des Eléments de géométrie qu'on attribue à Hippocrate[1] — s'ils avaient été conservés. Inversement, des réponses suffisamment complètes aux questions que nous nous sommes posées permettraient une restitution assez probable des dits Éléments; mais malheureusement la rareté des documents qui sont à notre disposition rendent les réponses à nos questions trop incomplètes pour donner aucune probabilité à une telle restitution. On ne pourra parler que de possibilités.

Les connaissances étendues dont témoigne la quadrature des lunules montrent que dans leur fond les Éléments d'Hippocrate peuvent avoir contenu la plupart des faits géométriques exposés par Euclide; mais comme forme les Éléments des deux auteurs doivent avoir été très différents. A voir jusqu'à quel point le plan des Éléments d'Euclide a été dicté par la considération des quantités irrationnelles, et comment le système a été construit d'après les principes des amis de Platon, on est amené à conclure qu'ils doivent être le résultat d'une refonte complète des Éléments qui n'avaient pas encore subi l'influence des Pythagoriciens et des Platoniciens, refonte commencée par Leon et Theudius et achevée par Euclide. Cela n'empêche pas pourtant que beaucoup de démonstrations particulières soient conservées, notamment la plupart de celles qui se trouvent dans le 3e et le 4e livres d'Euclide. Les constructions géométriques elles aussi doivent avoir été dans le livre d'Hippocrate les mêmes qu'on retrouve dans celui d'Euclide; mais dans le nouveau système on a depuis Menechme[2] attribué aux constructions exécutées conformément aux postulats à l'aide de la droite et du cercle un rôle tout particulier: celui de servir de démonstrations de l'existence des figures construites. Sans doute Hippocrate n'y a pas pensé; mais l'idée de faire un tel usage des constructions au moyen de la règle et du compas suppose

[1] Proclus, éd. Friedlein p. 66^8.

[2] Proclus, éd. Friedlein p. 78. Je renvoie du reste à mon article: Die geometrische Construction als „Existensbeweis" in der antiken Geometrie, Math. Annalen 47 p. 222.

une pratique antérieure à ces mêmes constructions; dès lors, où en chercher les descriptions sinon dans le livre d'HIPPOCRATE, dont l'intérêt pour ces constructions a été excité probablement par OENOPIDE (p. 442) et s'est manifesté en tout cas par le fragment dont nous nous sommes occupé? Le fait qu'il suppose connue la construction d'un trapèze dont les côtés sont donnés doit indiquer, soit qu'elle se trouvait dans ses Éléments, soit qu'il la regarde comme assez simple pour n'en décrire pas l'exécution, ce qu'elle devait être alors aux yeux des lecteurs des mêmes Éléments. En même temps, comme il n'existait pas encore pour lui de considérations systématiques réclamant l'usage exclusif des dits instruments, il est possible que ses Éléments aient contenu encore des constructions exécutées par d'autres moyens, par exemple par une *νεῦσις* (voir p. 445).

Il faut croire que dans ses Éléments HIPPOCRATE s'est occupé aussi de figures semblables dont il fait des applications si importantes dans sa quadrature des lunules; mais en tout cas cette théorie aura pris entre ses mains une forme bien différente de celle qu'EUCLIDE lui donne dans son VI[e] livre, qui fait suite à la théorie des proportions qu'il avait établie dans le V[e] livre sur des principes dus à EUDOXE. Au contraire, il aura eu besoin de la considération plus ou moins intuitive de figures semblables pour parvenir à l'application des proportions à la géométrie, pour établir une théorie des angles et des parallèles (voir p. 436 et 453) et en tout cas sous une forme ou une autre, pour démontrer le théorème de PYTHAGORE. En effet, la démonstration ingénieuse, mais artificielle dont se sert EUCLIDE semble être inventée pour le besoin de son système, dans lequel il fallait renvoyer le plus loin possible tout ce qui concerne les proportions et où avant cela il était nécessaire d'avoir le théorème de PYTHAGORE à sa disposition. Or entre les applications de figures semblables qui ont pu conduire au théorème de PYTHAGORE, il y en a une qui repose sur les mêmes principes dont Hippocrate fait usage dans les démonstrations de ses théorèmes sur les lunules. Elle ressemble même assez à son addition de segments semblables pour faire penser qu'elle a pu suggérer à Hippocrate l'idée de sa quadrature des lunules.

Je pense à une démonstration proposée par M. H.-A. Naber [1], qui l'attribue à Pythagore: c'est de toutes les démonstrations, celle qui, au moyen d'une seule droite auxiliaire, fait ressortir le plus immédiatement le théorème. Soit ABC un triangle ayant à C un angle droit, CD la perpendiculaire sur l'hypoténuse. Alors, d'après la notion de la similitude dont Hippocrate nous a donné la preuve, le triangle ACD sera semblable à ABC; car on parvient de l'un à l'autre par l'échange des deux côtés de l'angle A et par l'introduction d'un nouvel étalon: AC pour AB. De même BCD est semblable à BAC. Ces deux triangles sont donc „les mêmes parts" de ABC que les carrés faits sur leurs hypoténuses CA et BC le sont du carré fait sur l'hypoténuse AB. Or $ACD + BCD = ABC$. Donc etc.

L'algèbre géométrique dont on trouve les principes dans Euclide II est plutôt une invention des Pythagoriciens et nous ignorons jusqu'à quel point elle a été connue et utilisée par Hippocrate.

Tout aussi peu que la théorie générale des proportions due à Eudoxe (Euclide V) les fines démonstrations, dues probablement à Théétète, des théorèmes sur les nombres nécessaires pour établir rigoureusement l'irrationnalité de racines, et qui se trouvent dans Euclide VII, se sont rencontrées dans les Éléments d'Hippocrate; mais une partie essentielle des théorèmes sur les proportions qui, dans les livres arithmétiques d'Euclide, sont énoncés et démontrés pour le cas de proportions numériques, peuvent très bien avoir été connus

[1] Das Theorem des Pythagoras, wiederhergestellt in seiner ursprünglichen Form und betrachtet als Grundlage der ganzen Pythagoreischen Philosophie, Harlem 1908. Je cite d'après: Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.

d'HIPPOCRATE, soit qu'il s'en soit occupé dans ses Eléments de géométrie, soit qu'il les en ait exclus à cause de leur caractère arithmétique — ou „logistique" —. Nous savons même qu'il s'est servi de la même représentation géométrique d'une puissance au moyen des termes d'une série géométrique ou d'une série continuée de proportions que nous retrouvons dans les livres d'EUCLIDE. On dit[1] en effet qu'il a réduit le problème sur la duplication du cube à celui de la construction de deux moyennes proportionnelles. Il l'aura fait, si par exemple dans une partie stéréométrique de ses Éléments, il a dit que si

$$a : b = b : c = c : d$$

$a : d$ sera le rapport des cubes aux côtés a et b, ce qui est la manière grecque d'exprimer que ce rapport est égal à $a^3 : b^3$. Voilà ce qu'il a pu faire même sans penser à un problème de construction qui à son époque n'était pas probablement à l'ordre du jour hors des cercles pythagoriciens.

[1] Dans la lettre attribuée à ERATOSTHÈNE par EUTOCIUS (ARCHIMEDES, éd. HEIBERG III p. 104^{11}).